

## Использование пучков Гаусса в качестве математической модели сигнала систем ближней радиолокации

*В. В. Штыков*

Национальный исследовательский университет «МЭИ»,  
г. Москва, Россия

ShtykovVV@yandex.ru

**Аннотация.** Предложена математическая модель ближней радиолокации с учетом дифракции электромагнитных волн. В качестве модели полей используются пучки Гаусса — Эрмита. Объект представлен в виде произвольной поверхности идеального металла, расположенной в поле излучателя. Получены соотношения для комплексного коэффициента отражения. Приведены некоторые конкретные примеры влияния дифракции отраженного от объекта излучения на сигнал системы ближней радиолокации.

**Ключевые слова.** Дифракция, пучки Гаусса — Эрмита, комплексный коэффициент отражения, дополнительный набег фазы, системы ближней радиолокации.

## Gaussian Beams as a Mathematical Model of the Signal of Short-range Radar Systems

*Vitaly V. Shtykov*

National Research University “MPEI”, Moscow, Russia

ShtykovVV@yandex.ru

**Abstract.** The mathematical model of short-range radiolocation with the diffraction effects is proposed. The Gaussian beams are used as a field mode. The object surface is presented by an arbitrary surface of an ideal metal. The surface is situated in the field of the radiator. The formula for the complex reflection coefficient is obtained. Some specific examples of the influence of diffraction of the reflected from the object radiation on the short-range radar systems signal are given in the paper.

**Keywords.** Diffraction, Gaussian beam, reflection coefficient, phase shift, short-range radar systems.

## Введение

В настоящее время системы ближней радиолокации (СБРЛ) находят все более широкое применение в самых разнообразных областях: на транспорте, в научных исследованиях, измерительной технике (в частности, для регистрации вибрации), дистанционной диагностике процессов жизнедеятельности человека, гео-радиолокационных исследованиях и т. п.

Чаще всего интерес представляет информация о перемещении объекта исследования. Как правило, она извлекается из сигнала, который связывают с эффектом Доплера. Однако широко распространенное толкование этого эффекта относится к ситуации, когда излучатели и объект можно считать точечными. В СБРЛ это условие не выполняется, так как объект находится в ближней или промежуточной зоне антенны РЛС. Поэтому при обработке фазометрических данных, которые получают в таких системах, необходимо принимать во внимание конечные размеры как антенны, так и объекта.

Решение обратных задач электродинамики на основе уравнений Максвелла требует значительных вычислительных ресурсов и затрат времени. Поэтому для решения практических задач разумным является переход к приближенным методам. В ближней и промежуточной зонах антенны СБРЛ такой метод можно построить на основе приближенного описания электромагнитного поля в виде пучков Гаусса [1].

## Коэффициент отражения от объекта

Для того чтобы найти коэффициент отражения от объекта, представим внешнюю часть СБРЛ в виде некоторого двухполюсника (выводы которого указаны на рис. 1 справа). Апертура излучателя интерферометра имеет сечение  $2a \times 2b$ , а поперечное сечение объекта  $2c \times 2d$ . Поверхность объекта задана функцией  $\Delta z = f(x, y)$ <sup>1</sup>.

Запишем связь между комплексными амплитудами напряжений на выходных зажимах этого двухполюсника в виде:

$$\dot{U}_{\text{ref}} = \dot{R} \dot{U}_{\text{inc}}, \quad (1)$$

где  $\dot{U}_{\text{ref}}$ ,  $\dot{U}_{\text{inc}}$  — напряжение отраженной и падающей волны соответственно,  $\dot{R}$  — комплексный коэффициент отражения.

Комплексный коэффициент отражения можно найти, используя, так же как это было сделано в [2], лемму Лоренца:

$$\int \mathbf{j}_2 \mathbf{E}_1 dV = \int \mathbf{j}_1 \mathbf{E}_2 dV, \quad (1)$$

где  $\mathbf{j}_2$  — поверхностная плотность тока, которая для идеального металла связана с напряженностью магнитного поля  $\mathbf{1}_n \times \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{j}_1$  — плотность

<sup>1</sup> Ради удобства далее все линейные размеры будем считать нормированными по длине волны.

тока на выходе передатчика системы,  $\mathbf{E}_1$  — напряженность электрического поля на поверхности объекта, создаваемая падающей волной (т. е. током  $\mathbf{j}_1$ ),  $\mathbf{E}_2$  — напряженность электрического поля, наводимая отраженной волной на входе приемника (т. е. током  $\mathbf{j}_2$ ).

Интеграл справа дает:

$$\int \mathbf{j}_2 \dot{\mathbf{E}}_1 dV = I_1 \dot{U}_{\text{ref}}.$$

Следовательно, напряжение отраженной волны равно

$$\dot{U}_{\text{ref}} = \frac{1}{I_1} \int_{S_{\text{obj}}} [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}_{\tau 1}] \dot{\mathbf{E}}_1 dS,$$

а коэффициент отражения

$$\dot{R} = \frac{1}{\dot{U}_{\text{inc}} I_1} \int_{S_{\text{obj}}} [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}_{\tau 1}] \dot{\mathbf{E}}_1 dS.$$

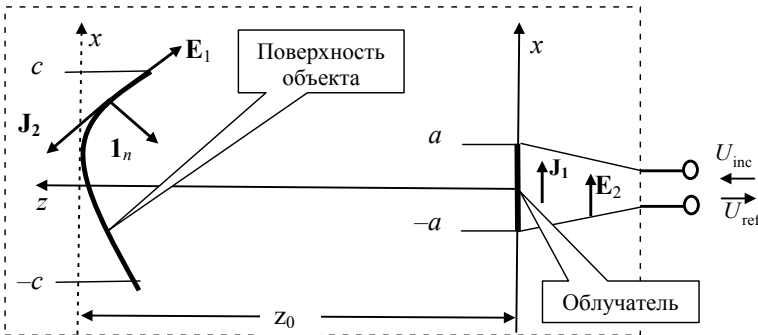


Рис. 1. К определению коэффициента отражения

Не вызывает сомнений, что комплексная амплитуда поля  $\dot{\mathbf{E}}_1$  прямо пропорциональна току  $\dot{I}_1$ , а  $\dot{\mathbf{H}}_{\tau 1}$  — комплексной амплитуде напряжения  $\dot{U}_{\text{inc}}$ . Поэтому комплексный коэффициент отражения равен

$$\dot{R} = C \int_{S_{\text{obj}}} [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}_{\tau 1}] \dot{\mathbf{E}}_1 dS.$$

Константа  $C$  определяется из условия

$$\dot{R} = -1$$

для объекта в виде бесконечной плоскости идеального металла<sup>1</sup>, расположенного в точке  $z = 0$ .

<sup>1</sup> Для диэлектрика следует заменить  $-1$  на коэффициент отражения плоской волны от плоской границы диэлектрика.

Если использовать амплитудно-фазовое распределение (АФР), нормированное на апертуру антенны к единице, то

$$\dot{R} = - \int_{S_{\text{obj}}} [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}_{r2}] \dot{\mathbf{E}}_2 dS. \quad (4)$$

Таким образом, комплексный коэффициент отражения можно найти по известным полям на поверхности объекта. Поскольку в (4) АФР находится под знаком интеграла, то можно вместо точных функций использовать некие эвристические аппроксимации. Такой подход оправдан тем, что конечной целью является определение параметров объекта, а не решение задачи дифракции. К тому же любые измерения реально содержат погрешности, и точность математической модели не должна быть выше точности этих измерений.

В качестве модели полей ближней и промежуточной зон можно использовать пучки Гаусса [1–3]. Медленно меняющуюся комплексную амплитуду такого пучка можно записать следующим образом:

$$\dot{W}(x, y, z) = \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2(1-jD_a)} - \frac{y^2}{2b^2(1-jD_b)}\right) / \sqrt{ab\pi(1-jD_a)(1-jD_b)}.$$

Здесь  $a$  и  $b$  — поперечные размеры пучка в плоскости  $z=0$ ;  $D_a = z/2\pi a^2$ ,  $D_b = z/2\pi b^2$  — приведенные расстояния.

После преобразований [2] окончательно получаем:

$$\dot{R} = -\exp(-j4\pi z_0) \int_{S_{\text{obj}}} \exp(j4\pi f(x, y)) \dot{W}(x, y, z)^2 dx dy. \quad (5)$$

Экспоненциальный множитель перед интегралом (5) вполне очевиден и не представляет особого интереса. Как правило, именно на нем сосредотачивается внимание. Если объект движется, то производная по времени от фазы дает поправку к мгновенной частоте. В дальнейшем этот множитель будет опущен.

Подставляя  $\dot{W}(x, y, z)$ , получаем:

$$\dot{R} = - \iint_{S_{\text{obj}}} \frac{\exp(j4\pi f(\xi, \eta)) \exp\left(-\frac{\xi^2}{(1-jD_a)} - \frac{\eta^2}{(1-jD_b)}\right)}{\pi(1-jD_a)(1-jD_b)} d\xi d\eta. \quad (6)$$

$$\text{Здесь } \xi = x/a, \eta = y/b, D_a = \frac{z_0 - f(\xi, \eta)}{2\pi a^2}, D_b = \frac{z_0 - f(\xi, \eta)}{2\pi b^2}.$$

Коэффициент отражения (6) является комплексной величиной и приближенно описывает дифракцию электромагнитных волн. Это приводит к поправке абсолютной величины коэффициента отраже-

ния, что очевидно и не особенно важно. Поправка к фазе имеет принципиальное значение. Дополнительная фаза связана с конечными размерами как излучателя, так и объекта. Для движущегося объекта она приводит к поправке значения мгновенной частоты, которая обычно используется для измерения параметров движения.

### Некоторые частные случаи

Для демонстрации влияния геометрии объекта на коэффициент отражения получим результаты для объекта в виде плоской пластины. В этом случае  $f(\xi, \eta) \equiv 0$ . Если центр пластины совпадает с осью  $z$ , то

$$\dot{R} = -\frac{1}{\pi(1-jD_a)(1-jD_b)} \int_{-\xi_c}^{\xi_c} \int_{-\eta_d}^{\eta_d} \exp\left(-\frac{\xi^2}{(1-jD_a)} - \frac{\eta^2}{(1-jD_b)}\right) d\xi d\eta, \quad (7)$$

где  $\xi_c = c/a$ ,  $\xi_d = d/b$ .

Используя замены  $\dot{\xi} = \xi/\sqrt{1-jD_a}$  и  $\dot{\eta} = \eta/\sqrt{1-jD_b}$ , интегралы в (7) можно выразить через интегралы вероятности  $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt$

[4]. В результате комплексный коэффициент отражения можно записать в следующем виде:

$$\dot{R} = -\frac{1}{\sqrt{(1-jD_a)(1-jD_b)}} \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_c}{\sqrt{(1-jD_a)}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\eta_d}{\sqrt{(1-jD_b)}}\right). \quad (8)$$

В качестве примера рассмотрим ситуацию, когда и излучатель, и объект имеют форму квадратов. В этом случае  $D_a = D_b$ ,  $\xi_c = \eta_d$  и (5) принимает вид

$$\dot{R} = -\frac{1}{\sqrt{(1-jD_a)}} \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_c}{\sqrt{(1-jD_a)}}\right)^2 \sqrt{(1-jD_a)}. \quad (9)$$

На рис. 2 приведены результаты расчета для поперечных размеров  $2a \times 2a = 2\lambda \times 2\lambda$  и  $2c \times 2c = 20\lambda \times 20\lambda$ .

Причина падения  $|\dot{R}|$  с увеличением расстояния вполне очевидна. Если расстояние до объекта стремится к бесконечности, то  $D \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{erf}_{x \rightarrow 0}(x) \approx 2x/\sqrt{\pi}$  [4], а коэффициент отражения при этом

$$\dot{R}_{z \rightarrow \infty} = \frac{16a^2 c^2}{z^2} = \frac{S_a S_c}{z^2}. \quad (10).$$

Выражение (10) согласуется с традиционной формулой для определения дальности действия радиолокатора. Дополнительный набег фазы — результат дифракции. Немонотонность функций  $\Phi_{add}(z)$  свя-

зана с влиянием краевых эффектов, которые являются проявлением дифракции. Изменению от максимума до максимума на рис. 2, б соответствует изменение фазы поля на краю пластины на  $2\pi$ .

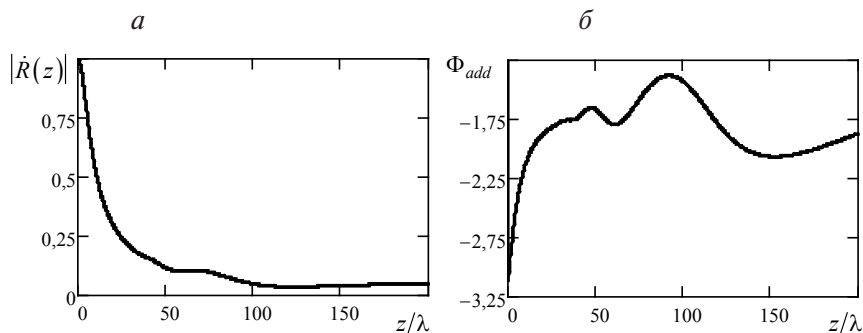


Рис. 2. Зависимость модуля (а) и дополнительной фазы (б) комплексного коэффициента отражения от расстояния до облучателя

При  $z \rightarrow \infty$  кривизна фазового фронта в пределах поперечного сечения объекта становится несущественной и дополнительная фаза обращается в нуль. Поскольку действительная и мнимая части комплексного коэффициента отражения связаны между собой преобразованием Гильберта, пульсациям  $\Phi_{add}(z)$  соответствуют пульсации  $|\dot{R}(z)|$ .

В качестве второго примера рассмотрим движение пластины поперек пучка. Пусть пластина движется вдоль оси  $x$  (см. рис. 1). Этому движению будет соответствовать изменение пределов интегрирования по координате  $x$  в интеграле (6). Интеграл по переменной  $y$  остается прежним. Для квадратной пластины окончательный результат интегрирования выглядит следующим образом:

$$\dot{R} = -\frac{1}{2(1-jD_a)} \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_c}{\sqrt{1-jD_a}}\right) \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_c + \Delta\xi}{\sqrt{1-jD_a}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_c - \Delta\xi}{\sqrt{1-jD_a}}\right) \right], \quad (11)$$

где  $\Delta\xi = \Delta x/a$ .

На рис. 3 приведены зависимости модуля и дополнительной фазы коэффициента отражения от величины смещения  $\Delta x/a$  относительно центра пучка для пластины с размерами  $2c \times 2c = 20\lambda \times 20\lambda$ , которая находится на удалении  $20\lambda$  от излучателя.

Наконец, рассмотрим вращение пластины вокруг продольной оси пучка. Из соображений симметрии ясно, что при вращении объекта периодические изменения коэффициента отражения появятся, только если сечения представляют собой прямоугольники разного размера.

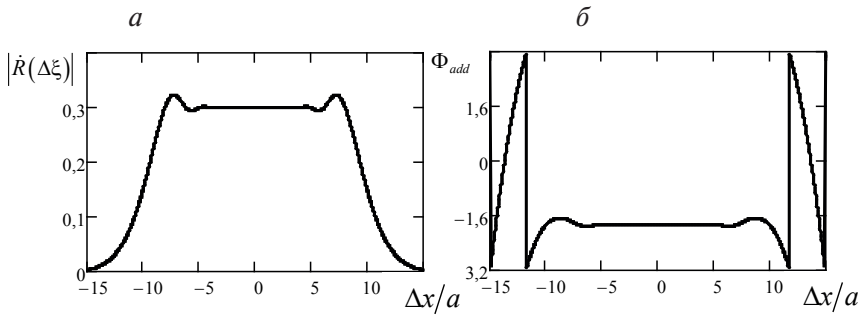


Рис. 3. Зависимость модуля (а) и дополнительной фазы (б) коэффициента отражения от величины смещения относительно оси  $z$

На рис. 4 приведены результаты расчета зависимостей модуля и дополнительной фазы от угла поворота  $\alpha$  вокруг продольной оси пучка. Излучатель имеет размеры  $2a \times 2b = \lambda \times 2\lambda$ . Объект с размерами  $2c \times 2d = \lambda \times 20\lambda$  расположен на расстоянии 10 длин волн от излучателя.

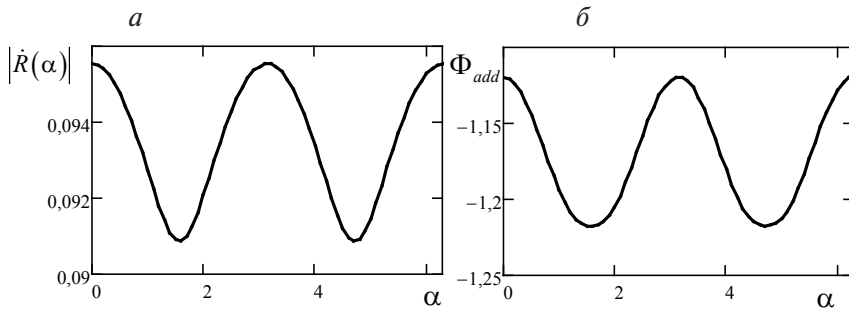


Рис. 4. Зависимость модуля (а) и дополнительной фазы (б) коэффициента отражения от угла поворота пластины вокруг оси  $z$

Зависимости имеют период, равный  $\pi$ . Это является следствием существования оси симметрии 2-го порядка. Причины изменения модуля коэффициента отражения более или менее очевидны. Их можно связать с долей энергии пучка, перехватываемой объектом. Изменение фазы обусловлено краевыми эффектами и является следствием дифракции пучка на объекте.

Для демонстрации влияния кривизны поверхности объекта найдем комплексный коэффициент отражения от диска радиусом  $r_d$  с радиусом кривизны  $R$  (рис. 5). Ради простоты будем считать, что облучатель имеет форму квадрата  $2a \times 2a$ , а центр диска совпадает с центром пучка.

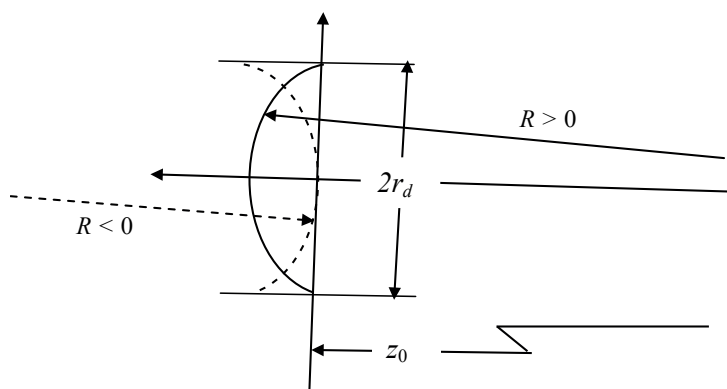


Рис. 5. Объект в форме диска с криволинейной поверхностью

При наличии осевой симметрии в интеграле (10) разумно перейти к цилиндрической системе координат. В результате получим:

$$\dot{R}(z, r_d, R) = - \iint_{S_{\text{obj}}} \frac{\exp(-j2\pi f(r, R)) \exp\left(-\frac{r^2}{(1-jD_a)}\right)}{\pi(1-jD_a)^2} r dr d\varphi, \quad (12)$$

где  $f(r, R) \approx \frac{ar^2}{|R|}$  — выпуклый диск,  $R < 0$ , и  $f(r, R) \approx \frac{a(r_d^2 - r^2)}{R}$  — вогнутый,  $R > 0$ .

Для плоского диска  $f(r, R) \equiv 0$  и интеграл (12) принимает совсем простой вид. В результате получаем коэффициент отражения в явном виде:

$$\dot{R}(z, r_d) = -\frac{1}{(1-jD_a)} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r_d^2}{(1-jD_a)}\right) \right]. \quad (13)$$

На рис. 6 приведены результаты расчета модуля коэффициента отражения и дополнительной фазы для плоского диска и апертуры облучателя  $2\lambda \times 2\lambda$ . Фаза пульсирует из-за краевых эффектов и кривизны фазового фронта пучка. На малых расстояниях сечение пучка меньше радиуса диска и краевые эффекты проявляются слабо. Ясно, что чем больше радиус диска, тем на большем удалении начинают появляться пульсации. В пределе  $z \rightarrow \infty$  фаза стремится к нулю<sup>1</sup>. Это связано с тем, что кривизна фазового фронта в пределах диска становится незаметной, к тому же и источник, и диск выглядят точками.

<sup>1</sup> Точнее, к целому числу  $2\pi$ .



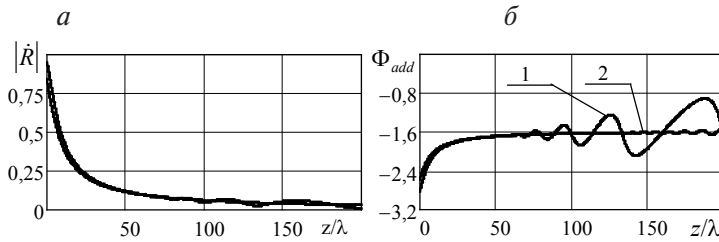


Рис. 6. Модуль (а) и дополнительная фаза (б) коэффициента отражения от плоского диска радиусом  $20\lambda$  (1) и  $50\lambda$  (2)

Для вогнутого диска на некотором расстоянии перед ним существует точка фокуса. При пересечении этой точки приемной антенной должен наблюдаться максимум модуля коэффициента отражения. На рис. 7 показаны результаты расчета для этого случая.

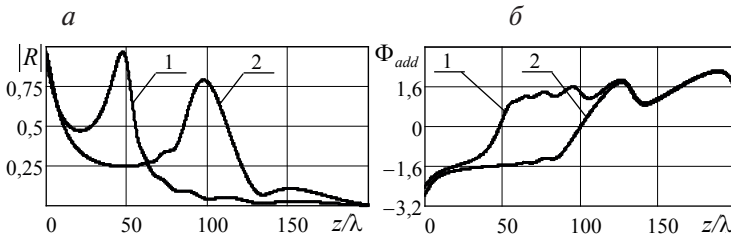


Рис. 7. Модуль (а) и дополнительная фаза (б) коэффициента отражения от вогнутого диска радиусом  $20\lambda$  (1) и  $50\lambda$  (2)

Точки фокуса хорошо видны на рисунке. Фаза в точках максимума равна нулю. Фаза при  $z \rightarrow \infty$  стремится к постоянной величине, которая связана с фазовым набегом от вершины до края диска. В представленных случаях в пределе фаза около  $\pi$ .

На рис. 8 показаны зависимости модуля и фазы коэффициента отражения от расстояния до облучателя двух значений радиуса выпуклого диска  $r_d = 20\lambda$  и  $50\lambda$  и радиуса кривизны  $R = -100\lambda$ .

Так как пучок расходящийся, то существенных различий для дисков разного радиуса кривизны практически не наблюдается. По той же причине фаза колеблется почти так же, как и у плоского диска.

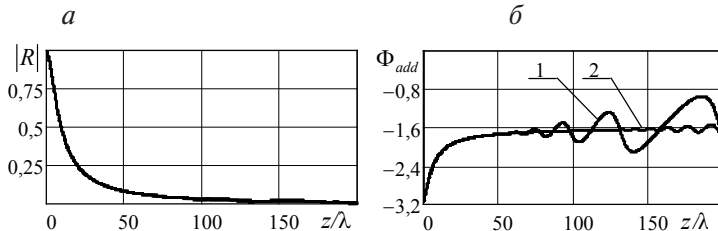


Рис. 8. Модуль (а) и дополнительная фаза (б) коэффициента отражения от выпуклого диска радиусом  $20\lambda$  (1) и  $50\lambda$  (2)

## Заключение

Полученные результаты показывают, что конечные размеры антенны и объекта в СБРЛ приводят к появлению дополнительного фазового набега. Для динамических объектов это, в свою очередь, приводит к поправке к мгновенной частоте (т.е. доплеровской частоте) измеряемого сигнала.

Это обстоятельство, во-первых, следует учитывать при обсуждении точности измерения скоростей движения. Изложенная выше приближенная теория учета дифракции позволяет оценить погрешность и установить границы параметров объекта, в пределах которых этим явлением можно пренебречь.

Во-вторых, дополнительный фазовый набег, как это видно из приведенного анализа, может представлять самостоятельный практический интерес. Например, изложенная приближенная модель позволяет рассмотреть вопрос о регистрации поперечных перемещений и вращения объекта. Это расширяет область использования радиоинтерферометров.

В [5] отмечается, что для СБРЛ остается актуальной разработка методов решения обратных задач электродинамики, необходимых для создания аппаратуры идентификации скрытых объектов. Квазиоптические методы расчета, которые также нашли достаточно широкое применение, менее трудоемки, но менее точны. Изложенный выше метод позволяет повысить точность моделирования при разумных затратах времени. Полученные в результате моделирования пространственные зависимости коэффициента отражения можно использовать для корреляционной обработки реального радиолокационного изображения.

## Список литературы

1. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М. : Радио и связь 1988. 440 с.
2. Мельниченко В. С., Штыков В. В. Матричное описание многоканального радиоинтерферометра // Радиотехника. 2013. № 10. С. 8–13.
3. Штыков В. В. Влияние дифракции электромагнитных волн на характеристики радиоинтерферометра // 27-я Международная Крымская конференция «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» : рефераты докладов (на русском и английском языках) (10–16 сентября 2017, г. Севастополь, Крым, Россия). С. 1580–1587.
4. Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions : corrected first edition ; reprint. Dover Publications, 1972. 1060 p.
5. Федоров В. Н., Федорова Л. Л., Прудеский Н. Д. Лучевой метод квази-Т волн при гео-радиолокационных исследованиях // 27-я Международная Крымская конференция «СВЧ-техника и телекоммуни-

кационные технологии» : рефераты докладов (на русском и английском языках) (10–16 сентября 2017, г. Севастополь, Крым, Россия). С. 1562–1569.

## References

1. Vajnshtejn L. A. *Elektromagnitnye volny* [Electromagnetic waves]. Moscow, Ra-dio i svyaz, 1988, 440 p. (In Russian).
2. Melnichenko V. S., Shtykov V. V. Matrichnoe opisanie mnogokanalnogo-radiointerferometra [Matrix description of multi-channel radio], *Radiotekhnika* [Radio engineering], 2013, 10, pp. 8–13. (In Russian).
3. Shtykov V. V. Vliyanie difrakcii ehlektromagnitnyh voln na harakteristiki radioin-terfe-rometra [Effect of diffraction of electromagnetic waves on parameters of radiointer-ferometry], *Proceedings of the 27 th International Conference in Crimea “Microwave and telecommunication technology”*, 2017, pp.1580–1587. (In Russian).
4. Abramowitz, Stegun I. A. *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, 1972, 1060 p.
5. Fedorov V. N., Fedorova L. L., Prudeckij N. D. Luchevoj metod kvazi-T voln pri geo-radiolokacionnyh issledovaniyah [The ray method of quasi-t-waves at GPR-surveys], *Proceedings of the 27 th International Conference in Crimea “Microwave and telecom-munication technology”*, 2017, pp.1562–1569. (In Russian).

## Информация об авторе

**Виталий Васильевич Штыков** — канд. техн. наук, профессор, Национальный исследовательский университет «МЭИ» (г. Москва, 111250, Российская Федерация).

## Information about the author

**Vitaly V. Shtykov** is a Candidate of Engineering Sciences, Professor in National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (NRU “MPEI”) (Moscow, 111250, Russian Federation).